**Mathematical Methods in Earth Sciences**

강의 8 – 2017년 5월 2일

벡터의 발산(divergence)과 회전(circulation)

**장(Fields)**

Topographic surface(지형표면)은 x, y 위치에 따라 결정되는 고도 z의 점들의 집합으로, 이 면은 스칼라장(scalar field)의 예제이다. 즉, 스칼라장은 스칼라량이 위치에 따라 변하는 경우를 나타낸다. 다른 예제로는 압력, 온도, 중력 포텐셜 등이 있다. 하지만, 벡터로 표현해야 하는 물리량 (예를 들어, 바람의 속도) 또한 존재한다. 만약 벡터량이 위치에 따라 변하는 경우 이를 벡터장(vector field)라 한다. 대표적인 예로는 중력가속도와 유체의 속도가 있다. 벡터장은 지도 상에서 화살표들의 집합으로 생각할 수 있다.

**(예제)**

1. 일기도상 바람의 방향과 세기를 표현



2. 해류(ocean currents)



3. 자석 주변의 철가루



4. 3차원 벡터장(http://www.bom.gov.au/lam/Students\_Teachers/pressure.shtml)



벡터장의 일반적인 표현법은 이며, 는 x와 y성분이 각각 와 인 벡터이며, 와 는 위치에 대한 함수이다. 벡터장은 3차원일 수도 있다. 하지만 이를 그림으로 표현하는 것은 쉽지 않다.

**(예제)** 다음은 다양한 벡터장을 표현한 것이다.



**연산자(Operators)** – something that acts on a function

우리는 이미 연산자를 만난 적이 있다. 예를 들어, 는 함수 와 결합하면 1차 도함수를 의미하는 연산자이다.

연산자는 스칼라 혹은 벡터일 수 있다. 위 예제의 연산자는 스칼라이다. 연산자 자체는 의미를 갖고 있지 않고 함수에 적용했을 때 의미를 갖게 된다.

또다른 예제로 함수의 기울기벡터인 또한 연산자를 포함하고 있다.

여기서 는 스칼라장을 나타낸다. 벡터 이면, 라는 성질이 있다. 여기서 는 상수이다. 따라서 를 다음과 같이 표현이 가능하다.

여기에서 보듯이 는 벡터 연산자(vector operator)이며, 이다. 3차원의 경우 로 표기가 가능하다. 는 벡터처럼 생각할 수 있기 때문에, 는 벡터와 스칼라의 곱이므로, 결과는 벡터가 된다.

**벡터의 발산(divergence)**

벡터의 공간적인 분포특성을 알기 위해서는 벡터의 공간적인 변화, 즉, 벡터의 미분을 살펴보아야 한다. 이전에 스칼라의 미분을 기울기로 정의하여 설명하였는데, 즉, 의 기울기벡터, 는 스칼라장 에 벡터 미분 연산자 을 적용한 결과이다. 이와는 달리 벡터의 미분은 발산(divergence)과 회전(circulation)이라는 두 경우로 달리 정의한다.

먼저 벡터의 발산에 대해 살펴보기로 한다. 만약, 이면, 와 내적(dot product)을 할 경우

이 연산의 결과는 스칼라량이며, 이를 함수의 발산(divergence)라고 부른다. 벡터에 대한 발산은 공간상에 분포한 벡터의 변화량을 임의의 한 점에서 스칼라로 표시한 것으로 보면 된다. 이때 발산이라는 용어를 쓴 것은 다음과 같은 개념에서 쉽게 이해할 수 있다. 공간상의 한 점 P에서의 벡터 분포가 아래 그림과 같이 세 가지로 나누어진다고 하자. 그림 (a)는 벡터가 점 P로부터 외부로 방사되는 경우로 이 때 벡터의 변화량을 양의 발산이라고 한다. 그렇다면 그림 (b)와 같은 벡터분포에서는 음의 발산을 갖게 되고, 그림 (b)와 같이 점 P로 들어오는 벡터의 합과 나가는 벡터의 합이 동일할 때 발산은 0이 된다.



(예제) 일 때, 를 구하라.

**발산의 의미?**

발산은 특정한 지점을 드나드는 어떤 물리량(열, 물질)의 전체 흐름을 나타내며, 좀 더 정확히는 표면적이 S인 미소체적 로부터 외부로 빠져나가는 임의의 물리량인 벡터 의 총량을 미소체적 로 나눈 것을 벡터 의 발산이라고 한다. 다시 말해,는 특정 지점으로부터 가 흘러 나가는 경향을 측정한다.

(예제) 연속방정식 의미

(예제) 맥스웰 방정식(Maxwell’s equations)의 이해

(전기장에 대한 가우스 법칙)



(자기장에 대한 가우스 법칙)

**벡터의 회전**

벡터의 회전은 말 그대로 공간상에 분포한 벡터가 임의의 한 점을 중심으로 주변에서 얼마나 회전하는가를 나타내는 것이다. 따라서 회전의 크기와 방향 모두 필요하므로 결국 벡터의 회전을 구한 값은 벡터로 표시되어야 한다. 벡터 의 공간상의 분포가 임의의 점 P 주변에서 아래와 같이 세 가지로 나누어진다고 하자. 그림(a)는 벡터가 점 P로부터 외부로 방사되는 경우로 이때에는 벡터의 발산은 0이 아니지만 점 P 주변에서 회전하는 성분은 없음을 쉽게 알 수 있다. 그런데 그림(b)와 같이 벡터분포가 점 P를 중심으로 시계반대방향으로 회전하는 경우에는 벡터의 회전이 0이 아닌 일정한 값을 갖게 된다. 단 이때의 회전 방향은 오른손 법칙을 적용하여 회전방향을 오른손바닥이 감싸는 방향으로 취할 때의 엄지손가락 방향으로 정한다. 따라서 그림(c)와 같이 점 P를 중심으로 시계방향으로 회전하는 벡터들이 존재할 경우 이 벡터에 대한 회전의 값을 양수로 정하려면 가운데 그림(b)와는 반대방향을 취해야 한다. 만약 그림(c)의 경우 이 벡터들에 대한 회전의 방향을 그림 (b)와 같이 취하면 이 때의 회의 크기는 음수로 표시된다.



그림과 같은 문제를 좀 더 정확히 수학적으로 표현하기 위하여 회전을 나타내는 연산자인 를 도입한다. (벡터장을 와 외적(cross product)를 취하는 경우)

회전 벡터의 세기는 특정 영역 주변의 벡터장의 회전하는 정도에 비례하며, 방향은 벡터장의 회전이 최대인 면에 수직을 가리킨다. 큰 회전 벡터의 위치를 찾기 위해서 특정 점에서의 서로 다른 방향으로의 흐름(크기, 방향, 또는 둘 다)이 크게 차이가 나는 곳을 찾으면 된다.

(예제) 아래 그림의 각 지점에서 벡터의 회전에 대해 기술하시오.



(예제) 일 때, 를 구하라.

(주의) 는 2,3차원에서 모두 정의되는 반면, 는 오직 3차원에서만 의미가 있다.

실제 공간상의 한 점 P 주변에서 임의의 벡터 의 분포는 이 벡터의 발산과 회전이 0인가 아닌가에 따라 다음과 같은 네 가지로 나눈다. 아래 각 그림의 발산과 회전의 정도를 나타내시오.



(예제) 맥스웰 방정식(Maxwell’s equations)의 이해

(암페어 법칙)

는 자기장, 는 전류밀도, 는 상수



(패러데이 법칙)

는 전기장

**연산자의 결합**

As you may recall, the gradient operator tells you the direction of greatest increase of the function (and how steep the increase is), the divergence tells you how strongly a vector function “flows” away from a point (or toward that point if the divergence is negative), and the curl tells you how strongly a vector function tends to circulate around a point.

연산자를 벡터로 이해하면 다양한 방법으로 결합이 가능하다. 예를 들어

(모든 스칼라장의 gradient의 curl은 0이다. 증명과제)

여기서 는 스칼라장이다. , 는 가능하다.

이는 스칼라장의 기울기의 발산으로, 라플라시안(Laplacian)이라 한다. 라플라스 연산자는 다음과 같이 표기한다.

이는 특정지점에서 모든 방향으로의 **함수의 변화의 변화**를 찾는데 도움이 된다. (예제: 가속도는 시간에 따른 위치의 변화의 변화, 함수의 최대값과 최소값)