**Mathematical Methods in Earth Sciences**

강의 6 – 2018년 4월 16일

다변수함수(Functions of Several Variables)와 편도함수(Partial Derivatives)

지금까지 독립변수가 하나인 함수 에 대해서 살펴보았다. 그러나 지구과학에서 사용되는 많은 이론은 여러 변수들에 의해 함수 값이 결정되는 다변수함수(function of several variables) 형태를 띠고 있다.

예를 들어 온도 가 위치에 따라 변하면 로 나타낼 수 있다. 이때 이들 독립변수가 변하면 온도의 변화는 어떻게 될까? 이 장에서는 먼저 다변수 함수의 의미와 독립변수가 2개인 함수에서 도함수를 구하는 방법을 살펴보고 그것의 의미에 대해서 정리한다.

두 개의 독립변수를 갖는 를 고려하자. 는 독립변수(independent variable)이며, 는 종속변수(dependent variable)이다. 1변수함수의 경우 2차원 곡선(curve)으로 가시화할 수 있다. 2변수함수의 경우 는 좌표에 대한 수직 좌표 값을 나타내므로 3차원 상에 면(surface)을 나타낸다. 가 같은 의 점들을 연결한 선을 등치선(contour lines)이라 한다.



****

**(예제)** 의 그래프 형태는?

먼저일 때 평면 상에 그래프를 그린다. 이므로, 포물선에 해당한다.



다음으로 일 때, 평면 상에 그래프를 그린다. 이므로,



동일한 값을 갖는 와 값을 구한다. 이는 contour lines을 찾는 과정이다. 이를 위해서 로 놓으면 모든 contour lines은의 타원위에 존재하며,*,* 와 만난다.



결과적으로 3차원 공간 상 면의 형태는 축으로 길게 늘어진 bowl의 형태를 띠게 된다.



2개 이상의 다변수 함수의 경우 다음과 같이 표기가 가능하다.

**편도함수(partial derivatives)**

일 때, 의 변화에 가 어떻게 변하는가? 가 변할 때 가 어떻게 변하는가? 이는 1변수함수의 미분을 다변수 함수로 확장을 통해 알 수 있다.

다음 1변수함수 의 미분의 정의를

에 대한 의 편도함수라 하는 다음과 비교해보자.

는 고정되어 있고, 축에 대한 곡선의 기울기를 구하였다. 유사하게 에 대한 의 편도함수는 다음과 같다.

2변수함수 에서 변수가 특정한 값에 고정되어 있다고 가정하면 (변수를 상수로 가정하면) 2변수함수는 실질적으로 독립변수가 하나인 1변수함수가 된다. 이 함수를 로 미분하면 도함수가 구해지는데 이것을 의 편도함수(partial derivative)라 한다. 마찬가지로 변수가 특정한 값에 고정되어 있다고 가정하면 의 편도함수를 구할 수 있다. 이와 같은 편도함수를 나타내기 위해 , 등의 기호로 표시한다. 를 ‘라운드’라 읽는다.

어떤 특정한 점 에서 의 편미분계수는 로 표시하며, 로 고정되어 있는 상태에서 에서 단위 변화에 대한 의 변화율을 나타낸다.

다변수함수의 편도함수는 관심대상의 변수 외의 모든 변수는 상수 취급하여 얻는다. 따라서 실질적으로 1변수함수가 된다. 그러므로 앞에서 배운 미분법을 그대로 적용할 수 있다. 이와 같이 편도함수를 구하는 것을 ‘편미분한다’라고 한다.

예를 들어

의 편도함수 , 이다.

**(예제)** 각 함수에 대한 와를 구하시오.

**(예제)** 의 와 의 편도함수 및 와 를 구하라.

**(예제)** 의 와 를 구하라.

연쇄법칙(chain rule)

**(예제)**

로 놓으면 ,

**(예제)** 다음의 를 구하라.

이제 편도함수의 기하하적인 의미를 살펴보자. 2변수함수 의 그래프는 3차원 공간에 그려진다. 가 ‘둥근 산’처럼 생겼다고 하자.



는 기하학적으로 평면에 평행하고 선을 지나는 평면이다. 이 평면으로 의 곡면을 절단하면 위 그림과 같은 단면이 나타난다. 이것을 평면에 다시 그리면 아래와 같은 단면이 나타난다. 이때 단면에 나타나는 함수는 임을 알 수 있다.



는 위 그림에서 보듯이 함수 의 에서 그은 접선의 기울기와 일치한다. 즉, 방향으로 전혀 움직이지 않고 점에서 축 방향으로 단위 변화할 때 의 변화율을 나타낸다. 마찬가지로 의 편도함수 에도 적용된다. 즉, 평면으로 공간을 자르고 나타난 함수 의 에서 그은 접선의 기울기가 된다.

**2차편도수함수**

함수 의 1차편도함수 , 도 의 함수 형태를 띤다. 그러므로 1차편도함수가 미분 가능하면 편도함수 정의에 의해서 1차편도함수를 가지고 2차편도함수를 구할 수 있다. 2차편도함수는 1차편도함수 를 각각 에 대해 편미분한 것으로 다음과 같다.

**(예제)** 함수 의 2차편도함수(,)를 구하라.

**(예제)** 이차원 열 확산 방정식(thermal diffusion equation) 의 해가 임을 보이시오.